

ELLIPSZIS - SEREG ALKOTTA FELÜLET

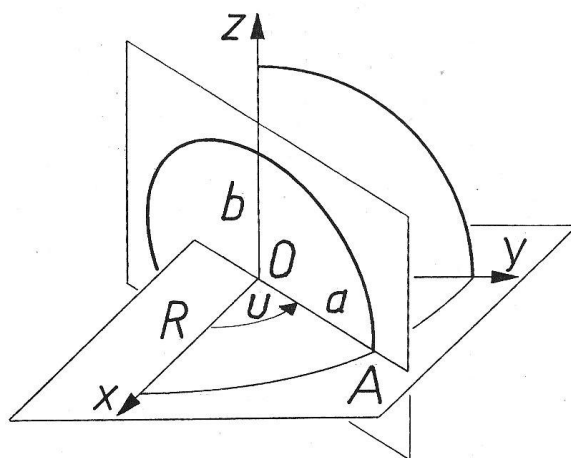
Írta: Hajdu Endre

A görbék és görbe felületek tulajdonságait a differenciálgeometria vizsgálja mélyrehatóan. Ez a tudományág a matematikailag leírható téralakzatokra általánosan érvényes tételeket fogalmazza meg, de nem elsőleges feladata a szemléltetés és egyes konkrét alakzatok egyedi vizsgálata.

A matematikailag megalapozott szemléltetés és az alakzatokkal kapcsolatos – euklideszi – szerkesztések az ábrázoló geometria tárgykörébe tartoznak.

Mivel egyes felületek különleges ábrázolási problémákat vethetnek fel, az ábrázoló geometriában indokolt egyes görbék és felületek egyedi vizsgálata is. Az alábbiakban éppen egy ilyen, ábrázolási szempontból figyelemre méltó felületről esik szó.

Tekintsük azt a felületet, melyet a derékszögű koordináta rendszer O kezdőpontjával azonos középpontú, olyan ellipszisek alkotnak, melyeknek az x, y síkban lévő nagytengelyükre az $a = R$, a z tengellyel egybeeső kistengelyükre a $b = R|\sin u|$ érvényes, ahol R adott távolság, u az ellipszis nagytengelyének az x tengellyel bezárt szöge (1. ábra).



1. ábra

Az így értelmezett felületnek csak azzal a részével foglalkozunk a továbbiakban, melyre $0^\circ \leq u \leq 90^\circ$, és a felületi pontok z koordinátája nem negatív. Mire az ellipszis nagytengelyének A végpontja befutja az x, y síkban lévő R sugarú negyedkört, a változó méretű ellipszis negyed íve $u = 90^\circ$ -nál az y, z síkban lévő negyed körre fajul. Megemlítjük még, hogy a továbbiakban az x, y síkot első, az y, z síkot második képsíknak tekintjük, ábrázolási szempontból. A fentebb definiált ellipszisívek által alkotott felület fontosabb jellemzői a következők:

1. Az x, y síkra merőleges síkú ellipsziseknek az y, z síkon lévő vetülete O középpontú körsereg. Ugyanis a vetület az y, z síkon olyan ellipszis, melynek

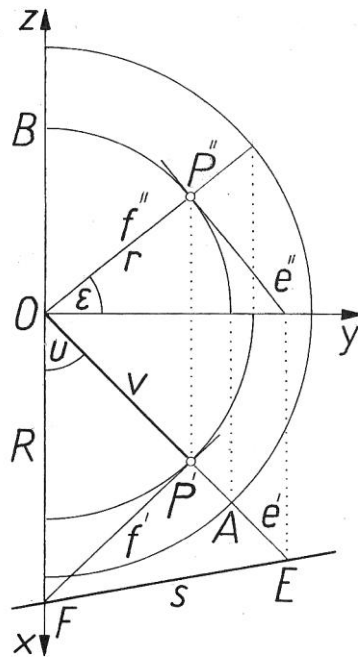
két társátmérő párja egymásra merőleges és egyenlő hosszúságú szakasz, ezért a vetület kör.

2. A felület egyenletének felírásához szükséges két paraméter egyike legyen a már értelmezett u szög, a másik paraméter a felületi pontnak a z tengelytől mért v távolsága (2. ábra). A felület pontjainak koordinátái:

$$x = v \cos u, \quad y = v \sin u,$$

az OP'' átfogójú derékszögű háromszögből:

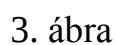
$$z = \sin u \sqrt{R^2 - v^2}.$$



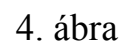
2. ábra

3. Az x tengelyhez illeszkedő síkok a felületet olyan ellipszis (ívben) metszik, melynek vetülete az x, y síkon körív. Legyen egy ilyen síknak az x, y síkkal bezárt hajlásszöge ε , a sík által a felületből kimetszett görbe egy P pontjának az x tengelytől mért távolsága r . Ekkor az első vetület hasonló háromszögei alapján $\frac{v}{r \cos \varepsilon} = \frac{R}{r}$, vagyis r -től függetlenül $v = R \cos \varepsilon$.

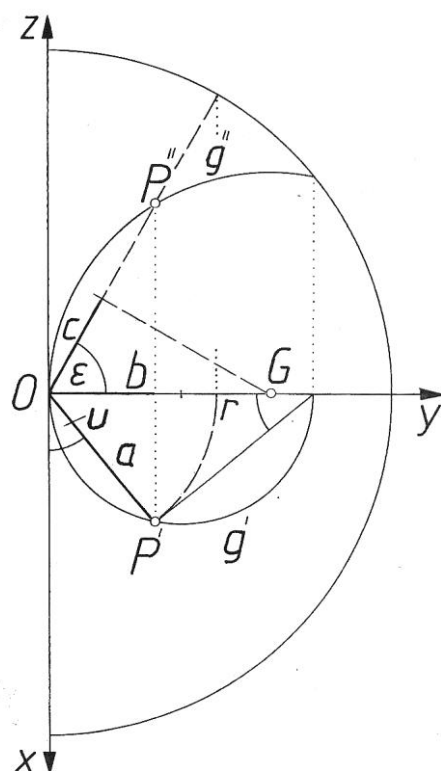
4. A felület szimmetrikus az x, y és az y, z síkok szögfelező síkjára, vagyis az y tengelyhez illeszkedő, s a két koordináta síkkal 45° -ot bezáró síkra. A 3/a ábra szerint az említett szimmetria esetén egy $x; y; z$ koordinátájú P pont szimmetrikus Q párjának koordinátái $z; y; x$. Ilyen pont a 3/b ábra szerint a felület minden pontja esetében szerkeszthető; ha a P pontot tartalmazó p ellipszis első vetületének sugara egyenlő a Q pontot tartalmazó q ellipszis második képének sugarával, akkor teljesülnek a koordinátákra fentebb említett feltételek.



A felületnek ugyanis létezik egy olyan k' vetületű görbéje, melynek első képe $R/2$ sugarú, az y tengelyt O -ban érintő kör (4. ábra). A felület korábban említett szimmetriája folytán k második képe is $R/2$ sugarú kör, vagyis k olyan ellipszis, melynek mindkét képsíkszöge 45° , két érintője az y tengellyel párhuzamos, ezért k a harmadik képsíkra merőleges síkú felületi görbe, mely az ábráról leolvashatóan, tetszőleges P pontjában érinti a felületet. A k görbe ezért a felület harmadik kontúrgörbéje.



7. A felület minden pontján átmenő két ellipszisen és a 6. pontban tárgyalt kontúrgörbén kívül további nevezetes görbék azok is, melyeknek mindkét vetülete kör, ill. körív.



5. ábra

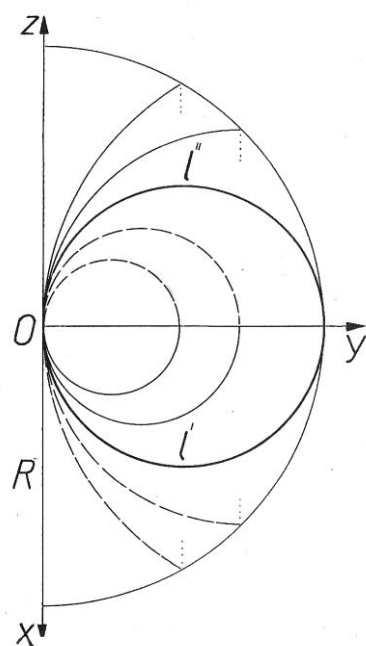
Tekintsük azt a felületi görbét, melynek első képe az r sugarú g' félkör, középpontja az y tengelyen van (5. ábra). Számítsuk ki a görbe valamely P pontja második képének távolságát attól a G ponttól, melyet az OP'' szakasz felező egyenese metsz ki az y tengelyből. Az ábra jelöléseivel

$$a = 2r \sin u, \quad b = 2r \sin^2 u, \quad \cos \varepsilon = \frac{a}{R}, \quad c = \frac{b}{2 \cos \varepsilon} = \frac{2r \sin^2 u \cdot R}{2 \cdot 2r \sin u} = \frac{R \sin u}{2},$$

$$P''G = \frac{c}{\cos \varepsilon} = \frac{R^2}{4r}.$$

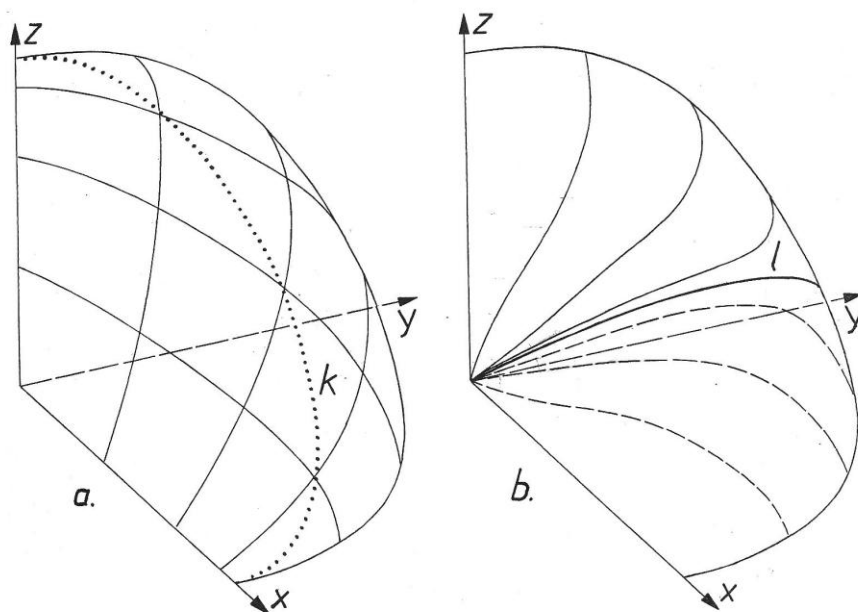
Vagyis u -tól függetlenül a g'' görbe pontjainak a G ponttól mért távolsága állandó érték, azaz g második képe körív, melynek – O -tól különböző – végpontját az ábra szerint felvetítéssel kapjuk.

Ha $r = \frac{R}{2}$, akkor a felület újabb ellipsziséhez jutunk (6. ábra), melynek mindkét képe félkör, s merőlegesen metszi a 3. kontúr ellipszisé. Az ábra l ellipszise kettéválasztja a g görbéhez hasonló, vagyis mindkét képsíkon kör, ill. körív vetületű felületi görbéket.



6. ábra

A 7. ábra a felületnek egy lehetséges (ferde) axonometrikus képét szemlélteti két módon: a 7/a ábra a felület két ellipszisseregét tünteti fel, a 7/b ábra pedig a mindkét vetületen kör, ill. körív vetületű felületi térgörbék seregét.



7. ábra

A 6. és 7/b ábrák szaggatott vonallal rajzolt görbéi ezúttal nem eltakartságot jeleznek.

A VETÜLETBEN KÖR (KÖRÍV) FELÜLETI GÖRBE EGYENLETE

Az első vetületen r sugarú körből $y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$. Úgy tűnik, célszerűbb az y koordinátát választani változónak, ugyanis adott r esetén egy y értékhez egyetlen x érték tartozik, míg fordított esetben adott x - hez két y tartozik. Ezután a z koordináta számítása a következő:

a második képen a körív sugarát jelölje ρ és $\rho = \frac{R^2}{4r}$. A körív egyenlete $(y - \rho)^2 + z^2 = \rho^2$.

Ebből rendezés után a z koordináta:

$$z = \sqrt{\frac{R^2 y}{2r} - y^2}.$$

FÜGGELÉK

A felület derékszögű koordinátás egyenlete és szemléltetése

Összeállította: Galgóczi Gyula

A fentiek szerint a felület paraméteres egyenletrendszere:

$$x = v \cdot \cos u, \quad (1)$$

$$y = v \cdot \sin u, \quad (2)$$

$$z = \sqrt{R^2 - v^2} \cdot \sin u. \quad (3)$$

Az (1) és (2) egyenletek négyzetre emelésével:

$$x^2 + y^2 = v^2, \quad (4)$$

innen – figyelembe véve, hogy v egy távolság – :

$$v = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

Most (2) -ből és (5) -ből:

$$\sin u = \frac{y}{v} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (6)$$

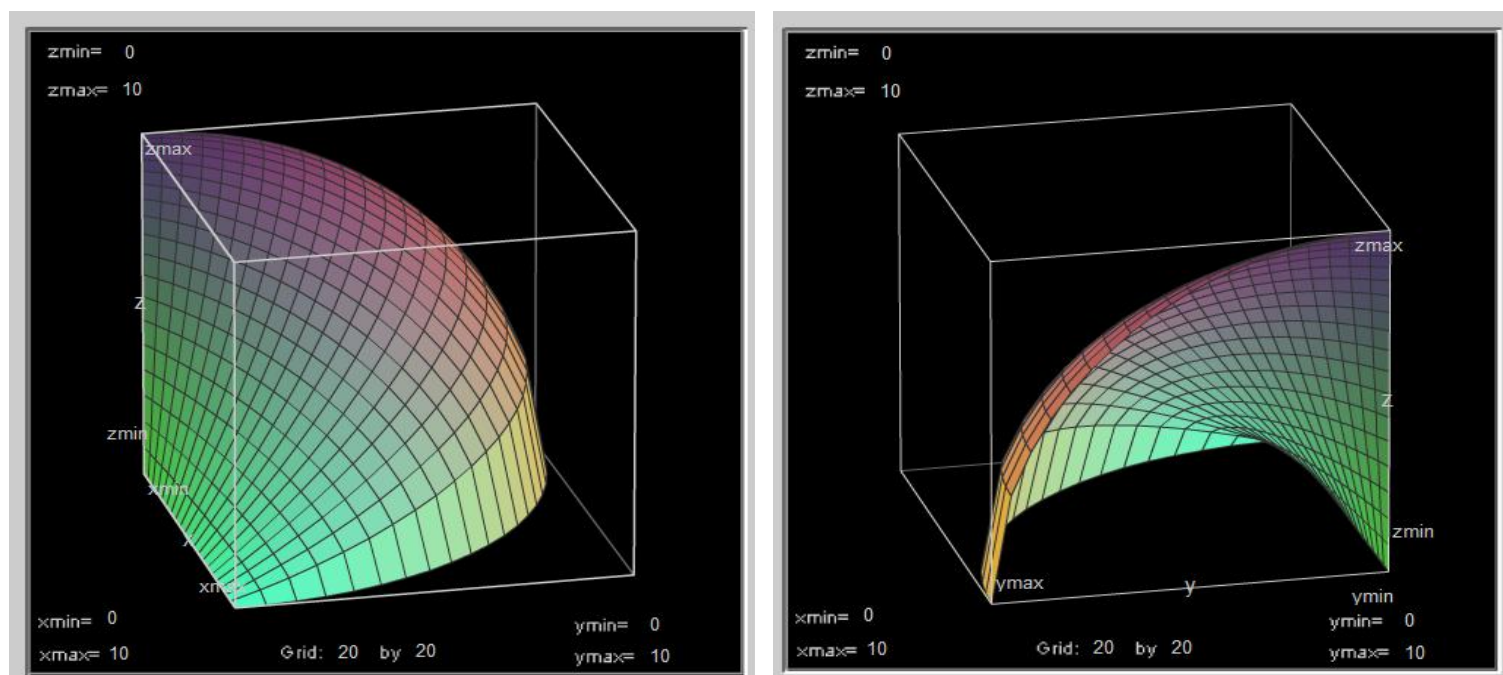
így (3), (4) és (6) szerint:

$$z = \sqrt{R^2 - v^2} \cdot \sin u = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (7)$$

(7) -et átalakítva:

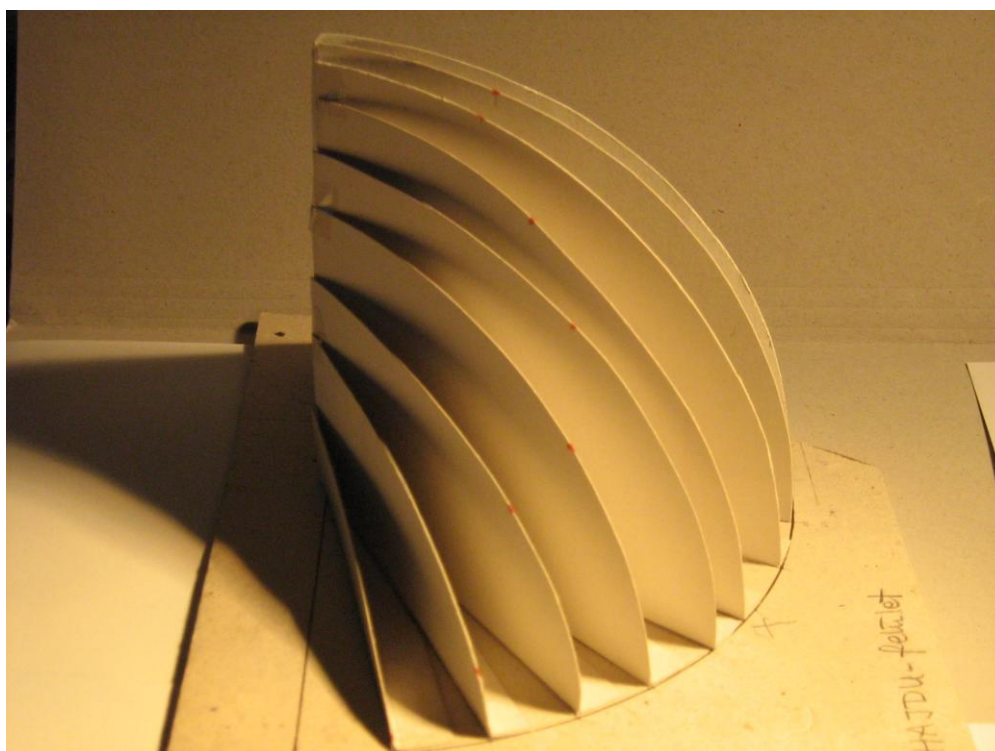
$$\underline{\underline{z(x, y) = y \cdot \sqrt{\frac{R^2}{x^2 + y^2} - 1}}}. \quad (8)$$

A 2. ábra előtti képletek szerint, az $R = 10$ és $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 10$, $y_{\min} = 0$, $y_{\max} = 10$ hosszegység adatokkal, az interneten az [1] címen talált 3D - s ábrázoló prog - rammal kaptuk az F1. ábrát.



F1. ábra

A tárgyalt felület egy darabjának a felület szerzője által készített kartonpapír makettje az F2. ábrán szemléltethető.



F2. ábra

Megfigyelhető az F1. és az F2. ábrák hasonlósága.

Forrás:

[1] – <http://www.math.uri.edu/~bkaskosz/flashmo/tools/parsur/>

Sopron ~ Sződliget, 2014. október 13.